Leçon 153 : Valeurs propres, vecteurs propres, calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications

Références : Rombaldi Analyse matricielle, Rombaldi, Mansuy, Allaire, Caldero (Histoires ...)

I - Généralités sur les éléments propres

1) Définitions et premières propriétés

2) Sous-espaces caractéristiques et décomposition de Dunford

3) Eléments propres de matrices particulières

II - Calcul approché d'éléments propres

1) Localisation des valeurs propres

2) Méthode de la puissance

III - Rayon spectral d'une matrice

1) Définition et propriétés

2) Décomposition et exponentielle matricielle

DEV 1 : Gerschgorin - Hadamard

DEV 2 : Homéomorphisme $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Leçon 153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $u \in \mathcal{L}(E)$ endomorphisme de K^n associé à A.

I - Généralités sur les éléments propres

1) Définitions et premières propriétés [Rom*]

DEF 1 : On dit que $\lambda \in K$ est valeur propre de A lorsqu'il existe $x \in E$, $x \neq 0$ tel que $Ax = \lambda x$.
On dit alors que x est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
Le sous-espace vectoriel $E_\lambda = \ker(A - \lambda Id_E)$ est le sous-espace propre associé à λ.
L'ensemble des valeurs propres de A dans K est le spectre de A et noté $Sp_K(A)$.

PROP 2 : Si $\lambda \in Sp_K(A)$ et x un vecteur propre associé, alors pour tout $P \in K[X]$, x est vecteur propre de $P(A)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.

PROP 3 : Soit $\lambda \in K$. $\lambda \in Sp_K(A)$ si et seulement si $A - \lambda I_n$ est non inversible si et seulement si $\det(\lambda I_n - A) = 0$

DEF 4 : L'application $\chi_A : \lambda \mapsto \det(\lambda I_n - A)$ est polynomiale : on l'appelle polynôme caractéristique de A. Ses racines sont exactement les valeurs propres de A.

THM 5 : Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme minimal π_A.

EX 6 : 0 est l'unique valeur propre de toute matrice nilpotente.

COR 6 : Soit $P \in K[X]$, $P(A) = 0$ et $\lambda \in Sp_K(A)$. Alors $P(\lambda) = 0$.

THM 7 : Soit $\lambda \in Sp_K(A)$. Si λ a pour multiplicité α en tant que racine du polynôme minimal, alors :
$1 \leq \dim(\ker(u - \lambda Id_E)) \leq \alpha$.

PROP 8 : Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Alors $Tr(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$

REM 9 : On peut avoir $Sp_K(A) = \emptyset$. Si K est algébriquement clos, $Sp_K(A) \neq \emptyset$; on peut donc chercher $Sp_{\overline{K}}(A)$ dans une clôture algébrique.

PROP 10 : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres 2 à 2 distinctes de A. Alors $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

2) Sous-espaces caractéristiques et décomposition de Dunford

THM 11 : (Cayley-Hamilton) $\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(K)}$ [Rom*]

DEF 12 : On suppose que $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$, $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$, λ_k deux à deux distinctes. Alors : $\pi_A(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\beta_k}$ avec $1 \leq \beta_k \leq \alpha_k$
On appelle sous-espace caractéristique de A les sous-espaces vectoriels $N_k = \ker\left((A - \lambda_k I_n)^{\alpha_k}\right)$ pour tout $k \in [\![1;p]\!]$.

THM 13 : Avec les notations précédentes, on a :
(1) $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$. Pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, on a :
(2) $N_k = \ker((A - \lambda_k I_n)^{\beta_k})$ (3) λ_k est l'unique valeur propre de $u_{|N_k}$
(4) $\dim(N_k) = \alpha_k$ (5) $(u - \lambda_k I_n)_{|N_k}$ est nilpotente d'indice β_k.

PROP 14 : Avec les notations précédentes, pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, le projecteur π_k sur N_k parallèlement à $\bigoplus_{j=1, j \neq k} N_j$ est un polynôme en u.

THM 15 (Dunford) : Si χ_A est scindé sur K, il existe un unique couple (D, N) de matrices diagonalisable et nilpotente tel que $DN = ND$ et $A = D + N$. D et N sont des polynômes en A.

3) Éléments propres de matrices particulières $K = \mathbb{R}$ [Rom]

DEF 16 : On appelle matrice orthogonale une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A{}^tA = I_n$.

PROP 17 : L'ensemble des matrices orthogonales est noté $O_n(\mathbb{R})$. $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

PROP 18 : On suppose $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ euclidien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
u est une isométrie (i.e. $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$) si et seulement si sa matrice dans ~~toute~~ base orthonormée de E est orthogonale.

COR 19 : Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1; 1\}$.

DEF 20 : On dit que A est symétrique et on note $A \in S_n(\mathbb{R})$ lorsque $A = {}^tA$.

PROP 21 : Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles

DEF 22: Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est positive (resp. définie positive) lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \langle Ax | x \rangle \geq 0$ (resp. >0)

PROP 23: Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. A est positive (resp. définie positive) si et seulement si $Sp(A) \subset \mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$).

DEF 24: ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) Soit $P \in K[X]$. On définit sa matrice compagnon par $C_P = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ (0) & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

PROP 25: $\chi_{C_P} = \pi_{C_P} = P$. $Sp_K(C_P) = \{$racines de P dans K$\}$. $\forall \lambda \in Sp(C_P)$, $\dim(E_\lambda) = 1$.

II - Calcul approché d'éléments propres

REM 26: Le calcul d'éléments propres se ramène à la recherche de racines de polynômes. En pratique, il est difficile de mener cette recherche de façon exacte notamment car les équations polynomiale de degré supérieur à 5 ne sont pas résolubles par radicaux. On cherche donc des approximations de ces éléments

1) Localisation de valeurs propres [MAN]

DEF 27: Pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on note $L_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$ $(1 \leq i \leq n)$ et $L = \max_{1 \leq i \leq n} \{L_i + |a_{i,i}|\}$

$C_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{i,j}|$ $(1 \leq j \leq n)$ et $C = \max_{1 \leq j \leq n} \{C_j + |a_{j,j}|\}$.

DEF 28: Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A est une matrice à diagonale strictement dominante lorsque $\forall i \in [\![1;n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

DEV 1)a)

THM 29 (Hadamard): Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante. Alors, A est inversible

DEF 30: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $i \in [\![1;n]\!]$. Le i-ème disque de Gerschgörin de A est le disque fermé de centre $a_{i,i}$ et de rayon $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$. On le note $\bar{D}(a_{i,i}, r_i)$.

DEV 1)b)

THM 31: (Gerschgörin) $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D(a_{i,i}, r_i)$.

THM 32: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont r disques de Gerschgörin ne rencontrent pas les n-r autres. Alors, la réunion de ces r disques contient exactement r valeurs propres de A comptées avec multiplicité.

COR 33: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{D}$ un disque de Gerschgörin de A qui ne rencontre pas les autres. Alors, $\mathcal{D}$ contient exactement une valeur propre de A et celle-ci est simple.

REM 34: Il est possible qu'un disque de Gerschgörin ne contienne aucune valeur propre : le disque unité est un disque de Gerschgörin de $E_{1,2} + 4E_{2,1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres, 2 et -2, sont en dehors de ce disque.

2) Méthode de la puissance [ALL]

Il s'agit d'une méthode pour calculer la plus grande ou la plus petite valeur propre (en module) d'une matrice (et un vecteur propre associé). Une limitation de la méthode est que la valeur propre extrême que l'on calcule doit être simple.

DEF 35: Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ avec $\lambda_n > |\lambda_i|$ pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$. La méthode de la puissance est définie par l'algorithme :

- Initialisation : $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_0\| = 1$
- Itérations : Pour $k \geq 1$
  - $\rightarrow y_k = A x_{k-1}$
  - $\rightarrow x_k = \frac{1}{\|y_k\|} y_k$
  - $\rightarrow$ Si $\|x_k - x_{k-1}\| \leq \varepsilon$, on arrête

ε est petit, de l'ordre de 10^{-6}.

Si $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ est petit alors x_k est un vecteur propre approché de $\|y_k\|$ car $Ax_k - \|y_k\| x_k = A\delta_k$.

PROP 36: Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres. On suppose que la valeur propre de plus grand module λ_n est simple et positive. On suppose que $x_0 \notin \mathrm{Vect}(e_n)^\perp$. Alors la méthode converge, c'est-à-dire que $\lim_{k \to +\infty} \|y_k\| = \lambda_n$, $\lim_{k \to +\infty} x_k = x_\infty$ avec $x_\infty = \pm e_n$. De plus, la vitesse de convergence est donnée par : $\left| \|y_k\| - \lambda_n \right| \leq C \left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right|^{2k}$, $\|x_k - x_\infty\|_\infty \leq C \left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right|^{k}$.

REM 37: La convergence de la suite de valeurs propres approchées $\|y_k\|$ est plus rapide que celle des vecteurs propres approchés x_k (quadratique au lieu de linéaire)

REM 38: On peut adapter la méthode de la puissance pour obtenir la plus petite valeur propre en module d'une matrice.

III - Rayon spectral d'une matrice

1) Définition et propriétés [ROT] $K=\mathbb{C}$

DEF 39: Le rayon spectral de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est le réel $\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$. C'est le rayon du plus petit disque centré en 0 du plan complexe contenant toutes les valeurs propres de A.

LEMME 40: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normale (i.e $A^*A = AA^*$), alors $\|A\|_2 = \rho(A)$.

$\boxed{\text{THM 41: Pour tout } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}}$

THM 42: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors :

1) Pour toute norme matricielle induite par une norme vectorielle, on a $\rho(A) \leq \|A\|$, l'inégalité pouvant être stricte.
2) $\forall \varepsilon > 0$, il existe une norme matricielle induite par une norme vectorielle telle que $\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$.

THM 43: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. LASSE :

1) $\lim_{k \to +\infty} A^k = 0$
2) $\forall x_0 \in \mathbb{C}^n$, la suite $(x_k)_{k \geq 0}$ définie par $x_{k+1} = A x_k$ converge vers le vecteur nul
3) $\rho(A) < 1$
4) Il existe une norme matricielle induite telle que $\|A\| < 1$
5) La matrice $I_n - A$ est inversible et $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} A^k$

COR 44: (Gelfand) Pour toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) = \lim_{k \to +\infty} (\|A^k\|)^{\frac{1}{k}}$.

THM 45: L'application $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \rho(A)$ est continue.

2) Décomposition et exponentielle matricielle

THM 46: (Décomposition en valeurs singulières) Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ s'écrit comme $A = U\tilde{\Sigma}V^*$ avec $U \in \mathcal{U}_m(\mathbb{C})$, $V \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et $\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ et $\Sigma \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ est diagonale à coefficients strictement positives pour $r = rg(A)$. Ref ?

THM 47: (Décomposition polaire) L'application :
$$\begin{aligned} O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (O,S) &\longmapsto OS \end{aligned}$$
est un homéomorphisme

DEV 2

$\boxed{\text{THM 48: } \exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ est un homéomorphisme}}$